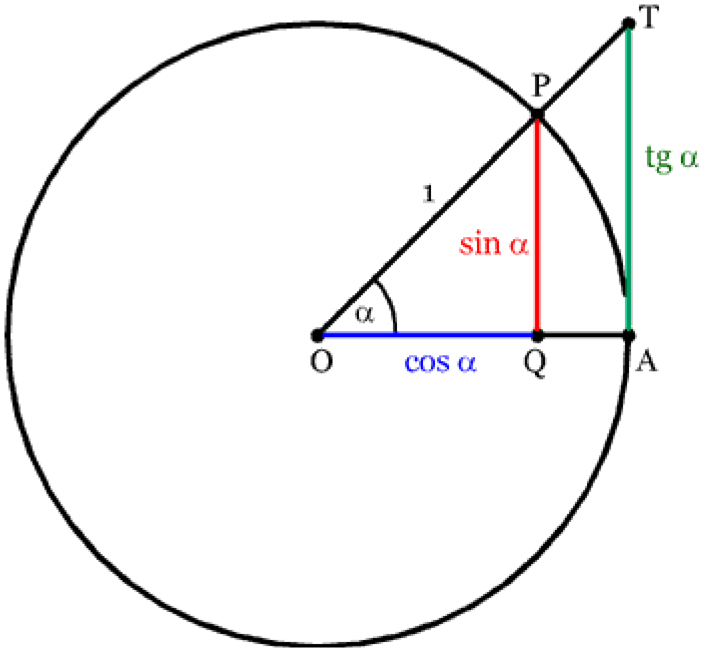
formule trigonometria

circonferenza trigonometrica di raggio 1

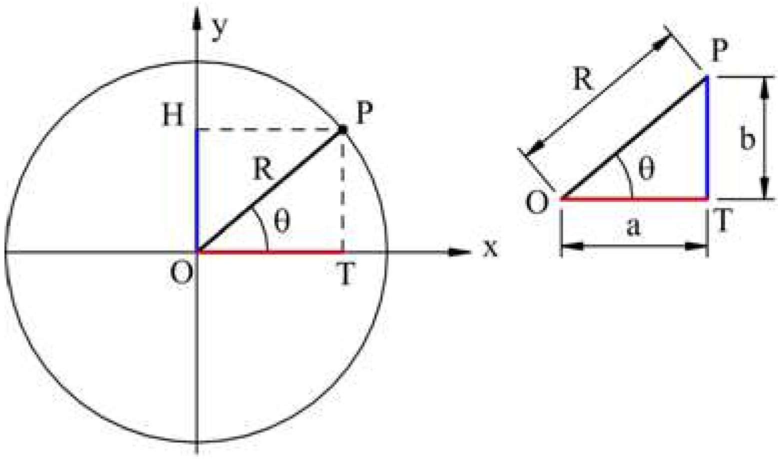


Funzioni Trigonometriche

Dato un piano cartesiano, costituito da due assi ortogonali, consideriamo una circonferenza di raggio R avente centro nell'origine O della coppia di assi. Scegliamo arbitrariamente un punto P sul I° quadrante della circonferenza il raggio $R = \overline{OP}$ determina un angolo θ con l'asse x delle ascisse.

Definiamo il punto H come la proiezione ortogonale di P sull'asse y delle ordinate.

Definiamo il punto T come la proiezione ortogonale di P sull'asse x delle ascisse.



Potranno essere individuati i due segmenti:

$a = \overline{OT} = \overline{PH}$ e $b = \overline{OH} = \overline{PT}$

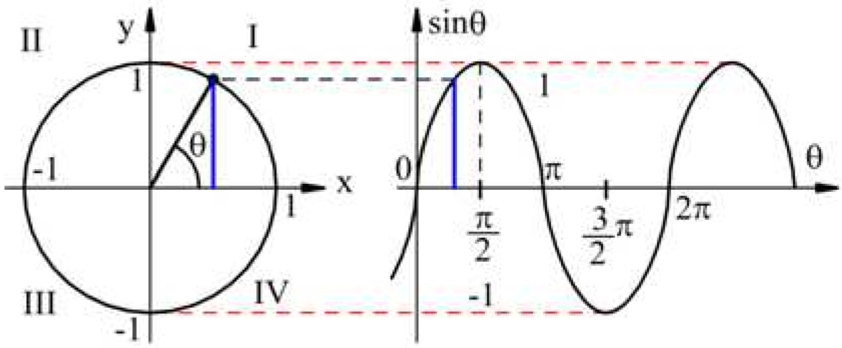
Definiamo:

$$sin\theta = \frac{b}{R} \qquad cos\theta = \frac{a}{R} \qquad tg\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{b}{a}$$

nel caso del cerchio trigonometrico con R=1 si ha:

$$sin\theta = b \qquad cos\theta = a \qquad tg\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{b}{a}$$

Variazioni del seno



Nel cerchio trigonometrico di raggio 1:
Se θ=0 si ha b=sinθ =0

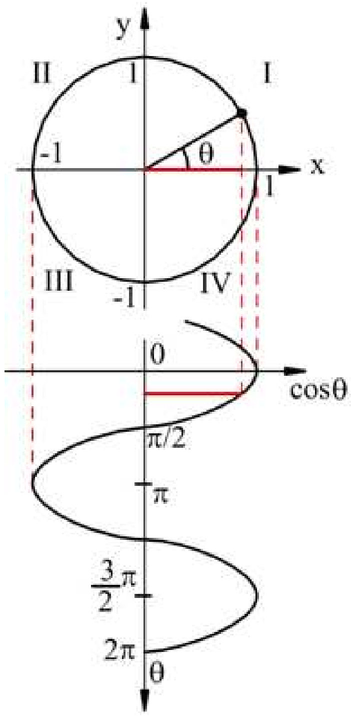
Se 0°< θ<90° sinθ varia da 0 a 1, il raggio del cerchio si trova nel I° quadrante con funzione sinθ CRESCENTE.

Se 90°< θ<180° sinθ varia da 1 a 0, il raggio del cerchio si trova nel II° quadrante con funzione sinθ DECRESCENTE.

Se 180°<θ <270° sinθ varia da 0 a -1, il raggio del cerchio si trova nel III° quadrante con funzione sinθ DECRESCENTE..

Se 270°<θ <360° sinθ varia da -1 a 0, il raggio del cerchio si trova nel IV° quadrante con funzione sinθ CRESCENTE.

Variazioni del coseno



Nel cerchio trigonometrico di raggio 1: Se θ=0 si ha a=cosθ =1

Se immaginiamo che il punto P si muova lungo la circonferenza in sento antiorario (convenzionalmente positivo)

Se 0°<θ <90° cosθ varia da 1 a 0, il raggio del cerchio si trova nel I° quadrante con funzione cosθ DECRESCENTE.

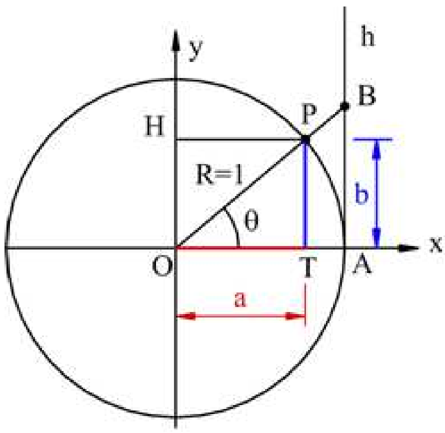
Se 90°< θ<180° cosθ varia da 0 a -1, il raggio del cerchio si trova nel II° quadrante con funzione cosθ DECRESCENTE.

Se 180°< θ<270° cosθ varia da -1 a 0, il raggio del cerchio si trova nel III° quadrante con funzione cosθ CRESCENTE.

Se 270°<θ <360° cosθ varia da a 1, il raggio del cerchio si trova nel IV° quadrante con funzione cosθ CRESCENTE.

Variazioni della tangente

Sul cerchio trigonometrico di raggio 1 conduciamo ad esso la tangente nel punto A; sia B l'intersezione fra la tangente h e il prolungamento del raggio R passante per P. Per la similitudine dei triangoli:

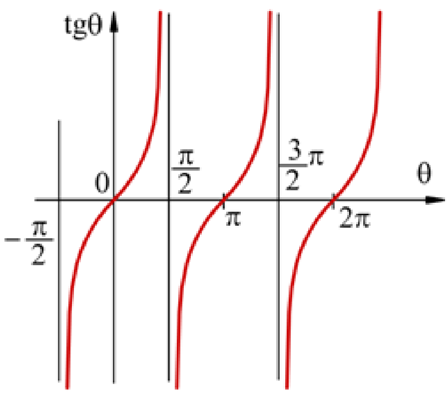


$$\frac{\overline{PT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad => \quad \frac{b}{a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{R}} = tg\theta$$

essendo R=1 si ha

$\overline{AB} = tg\theta$

Se immaginiamo che il punto P si muova lungo la circonferenza in senso antiorario (convenzionalmente positivo)



Per 0°< θ<90° il punto P ed il raggio R si trovano nel I° quadrante; B descrive la parte positiva della retta h andando da $\overline{AB} = 0 \ per\ \theta = 0$ ad

$\overline{AB} = +\infty \ per\ \theta = \frac{\pi}{2} = 90°$ la funzione tg θ è

CRESCENTE.

Per 90°< θ<180° il punto P ed il raggio R si trovano nel II° quadrante; B descrive

la parte negativa della retta h andando da $\overline{AB} = -\infty \ per\ \theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ ad

$\overline{AB} = 0 \; per \; \theta = \pi = 180°$ la funzione è tgθ CRESCENTE.

Per 180°< θ<270° il punto P ed il raggio R si trovano nel III° quadrante; B si comporta come nel I° quadrante (descrive la parte positiva della retta h) andando da $\overline{AB} = 0 \; per \; \theta = \pi = 180°$ ad $\overline{AB} = +\infty \; per \; \theta = \frac{3}{2}\pi = 270°$ la funzione tgθ è CRESCENTE.

Per 270°< θ<360° il punto P ed il raggio R si trovano nel IV° quadrante; B si comporta come nel II° quadrante (descrive la parte negativa della retta h) andando da $\overline{AB} = -\infty \; per \; \theta = \frac{3}{2}\pi = 270°$ ad $\overline{AB} = 0 \; per \; \theta = 2\pi = 360°$ la funzione tgθ è CRESCENTE.

Funzione inversa arcoseno

Dati i numeri reali x ed y con $-1 \le x \le 1$ ed $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ si ha la funzione inversa

Funzione inversa arcocoseno

Dati i numeri reali x ed y con $-1 \le x \le 1$ ed $0 \le y \le \pi$ si ha la funzione inversa

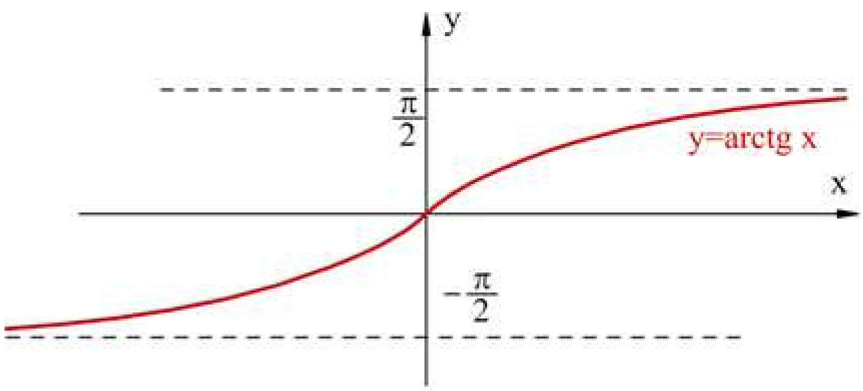
Funzione inversa arcotangente

Dati i numeri reali x ed y con $x \in \Re$ ed $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ si ha la funzione inversa

$y = arctgx$ con $D \equiv \Re$ e $C = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

se appunto

$x = tgy$ => $y = arctgx$



Funzioni reciproche

$$\cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

Limitazioni: $-1 \le \sin\alpha \le 1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$

Relazione fondamentale della trigonometria:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Relazioni Angoli complementari

Angoli che differiscono di un angolo retto

Angoli che hanno per somma tre angoli retti

Angoli che differiscono di tre angoli retti

Angoli che differiscono di un angolo piatto

Angoli supplementari

Angoli esplementari

Angoli opposti

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

Formule di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Formule parametriche

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^{2}\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^{2}\frac{\alpha}{2}}{1+tg^{2}\frac{\alpha}{2}} \qquad tg\,\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^{2}\frac{\alpha}{2}}$$

con $\alpha\neq\pi+2k\pi$

Formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Teorema dei seni

Teorema delle proiezioni

$$a=c\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\gamma$$

$$b=c\cdot\cos\beta+a\cdot\cos\gamma$$

$$c=b\cdot\cos\alpha+a\cdot\cos\beta$$

Teorema di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Formule di Briggs con p=semiperimetro del triangolo

Angoli particolari

gradi	radianti	sin	cos	tg	ctg
0°	0	0	1	0	non esiste
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
180°	π	0	- 1	0	non esiste
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste	0
360°	2π	0	1	0	non esiste